Tarea n°2

P.1 Para este pregunta digamos que A **coda** $b \in \{0,1\}^n$ si $\forall i, b_i = \mathbb{1}_{x_i \in A}$.
1. Sea $x_1, \ldots, x_{n+m}$ en $\mathbb{R}^d$ y sea ϕ el mapeo biyectivo

$$\phi : \begin{array}{ccc} \{0,1\}^{n+m} & \longrightarrow & \{0,1\}^n \times \{0,1\}^m \\ (b_1, \ldots, b_{n+m}) & \longmapsto & ((b_1, \ldots, b_n), (b_{n+1}, \ldots, b_{n+m})). \end{array}$$

Tenemos $\phi(\mathcal{A}(x_1^{n+m})) \subset \mathcal{A}(x_1^n) \times \mathcal{A}(x_{n+1}^{n+m})$. Entonces $|\mathcal{A}(x_1^{n+m})| = |\phi(\mathcal{A}(x_1^{n+m}))| \leq \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(n)\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(m)$. Entonces, tomando el máximo, $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(n+m) \leq \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(n)\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(m)$.
2. Sea $x_1, \ldots, x_n$ en $\mathbb{R}^d$. Si $b \in \mathcal{C}(x_1^n)$, existe $C \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ que coda b, entonces $b \in \mathcal{A}(x_1^n)$ o $b \in \mathcal{B}(x_1^n)$. Finalmente $|\mathcal{C}(x_1^n)| = |\mathcal{A}(x_1^n) \cup \mathcal{B}(x_1^n)| \leq |\mathcal{A}(x_1^n)| + |\mathcal{B}(x_1^n)| \leq \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(n) + \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(n)$.
Tomando el máximo, tenemos $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}(n) \leq \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(n) + \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(n)$.
3. Sea $x_1, \ldots, x_n$ en $\mathbb{R}^d$ y sea Inv el mapeo biyectivo

$$\mathrm{Inv} : \begin{array}{ccc} \{0,1\}^n & \longrightarrow & \{0,1\}^n \\ (b_1, \ldots, b_n) & \longmapsto & (1-b_1, \ldots, 1-b_n). \end{array}$$

Tenemos $\mathrm{Inv}(\mathcal{A}(x_1^n)) = \mathcal{C}(x_1^n)$ entonces $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(n) = \mathcal{S}_{\mathcal{C}}(n)$.
4. Sea $x_1, \ldots, x_n$ en $\mathbb{R}^d$ y sea Φ_{cod} la operación de codificación

$$\Phi_{\text{cod}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \\ (A, B) & \longmapsto & ((\mathbb{1}_{x_1 \in A}, \ldots, \mathbb{1}_{x_n \in A}), (\mathbb{1}_{x_1 \in B}, \ldots, \mathbb{1}_{x_n \in B})) \end{array}$$

y $\Pi : (x, y) \mapsto x \times y$ la operación de producto termino por termino de vectores. Son funciones sobreyectivas y si $C = A \cap B$ coda b, $\Pi \circ \Phi_{\text{cod}}(A, B) = b$.
Entonces $|\mathcal{C}(x_1^n)| = |\Pi \circ \Phi_{\text{cod}}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})| \leq |\Phi_{\text{cod}}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})| = |\mathcal{A}(x_1^n)| \times |\mathcal{B}(x_1^n)| \leq \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(n)\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(n)$. Tomando el máximo el resultado sigue.
5. es una consecuencia de 3. y 4.
6. Sea $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ en $\mathbb{R}^{2d}$ y sea

$$\Phi'_{\text{cod}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \\ (A, B) & \longmapsto & ((\mathbb{1}_{x_1 \in A}, \ldots, \mathbb{1}_{x_n \in A}), (\mathbb{1}_{y_1 \in B}, \ldots, \mathbb{1}_{y_n \in B})). \end{array}$$

Tenemos $\mathcal{C}(x_1^n, y_1^n) = \Phi'_{\text{cod}}(\mathcal{C}) = \Phi'_{\text{cod}}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \mathcal{A}(x_1^n) \times \mathcal{B}(y_1^n)$. Tomar el máximo da el resultado (en efecto es una igualdad).

P.2 Queremos probar que los dos casos $V < \infty$ y $V = \infty$ son disjuntos. Si existe un n tal que $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(n) < 2^n$, entonces para cada $n' > n$, $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(n + (n' - n)) \leq \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(n)\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(n' - n) < 2^n 2^{n'-n} = 2^{n'}$ y n acota el conjunto de los $i \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(i) < 2^i$. Como subconjunto acotado de naturales este conjunto tiene un máximo y $V(\mathcal{A})$ es bien definido.

P.3.a Es sencillo de ver que Ψ_1 es inyectiva. Eso implica $|B_0| = |\Psi_1(B_0)| = |B_1|$. Denotamos B_S el conjunto $\{(b_{s_1}, \ldots, b_{s_m}) : b = (b_1, \ldots, b_n) \in B\}$. Entonces si, B_1 rompe S, $(B_1)_S = \{0,1\}^m$. El objetivo es de mostrar que $(B_0)_S = \{0,1\}^m$. <u>Si 1 no es uno de los indices de S</u>, entonces $(B_0)_S = (B_1)_S$ porque no cambian las coordenadas otras que 1. <u>Si 1 es uno de los indices de S</u>, cada elemento $b_S = (b_1, \ldots, b_{s_m}) = (b_1, v)$ (con $v \in \{0,1\}^{m-1}$ y $b_1 \in \{0,1\}$) parece en $(B_1)_S$. Tratamos los dos casos $b_1 = 1$ o $b_1 = 0$.
<u>Si $b_1 = 1$</u>, b_S es la restricción de un elemento $b \in B_1$ que ya estuvo en B_0. Se ve porque Ψ_1 transforma '1 en 0' o '0 en 0' o '1 en 1'. Entonces todos los elementos $(1, v)$ forman parte de $(B_0)_S$.
<u>Si $b_1 = 0$</u>, un elemento $(1, v) \in (B_1)_S$ que es una restricción de un $b \in B_1$ es la imagen del mismo b (porque $b_1 = 1$). Eso implica que el elemento b' definido por $b_1 = 0$ y las mismas otras coordenadas que b esta en B_0 (si no, la imagen de b hubiera sido b'). Entonces $(b')_S = (0, v) \in (B_0)_S$ y todos los elementos $(0, v) \in (B_0)_S$. Finalmente $(B_0)_S = \{0,1\}^m$ y B_0 rompe S.

P.3.b Sea $v = (v_1, \ldots, v_n) \in B_n$. Vimos (ultima pregunta) que, $(1, v_2, \ldots, v_n) \in B_1 \Rightarrow (0, v_2, \ldots, v_n) \in B_1$. Las transformaciones siguientes no cambian la primera coordenada, lo que implica que $(1, v_2, \ldots, v_n) \in B_n \Rightarrow (0, v_2, \ldots, v_n) \in B_n$. De la misma manera, $\forall i$, $(v_1, \ldots, 1, \ldots, v_n) \in B_i \Rightarrow (v_1, \ldots, 0, \ldots, v_n) \in B_i$, que se transfiera a B_n también y eso implica que $T_v \subset B_n$. Como B_0 no rompe cada S con $|S| = m > V$, tampoco B_n. Si v tiene $m > V$ unos, sea $S = \{i : v_i = 1\}$ es un conjunto tal que $(B_n)_S = \{0,1\}^m$ por la propiedad que justamente hemos probado. Pero eso implica que B_n rompe S, absurdo! Entonces v no tiene mas que V unos.

P.3.c T es precisamente el conjunto de todos los v tal que v no tiene mas que V unos, entonces tenemos $B_n \subset T$ por la pregunta anterior. T es la union disjunta de los conjuntos de elementos que tengan i unos, para $0 \le i \le V$ que cada uno tenga $\binom{n}{i}$ elementos. Entonces $|T| = \sum_{i=0}^{V} \binom{n}{i}$.

P.3.d La desigualdad es evidente para $n \le V$ entonces, en lo que sigue, supongamos $n > V$. Sean $x_1, \ldots, x_n$ tal que $B_0 = \mathcal{A}(x_1^n)$ y $|B_0| = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(n)$ (que existen por definición de $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$). Como $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(n) < 2^n$ para cada $n > V$, B_0 no rompe cada S que tenga mas que V indices. Usando las preguntas anteriores, tenemos

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(n) = |B_0| = |B_n| \le |T| = \sum_{i=0}^{V} \binom{n}{i}.$$

P.4 Tenemos para cada n,

$$\sum_{i=0}^{V} \binom{n}{i} \le \sum_{i=0}^{V} \frac{n^i}{i!} \le \sum_{i=0}^{V} \frac{n^i V!}{i!(V-i)!} \le \sum_{i=0}^{V} n^i \binom{V}{i} \le (n+1)^V.$$

Para $n \ge V$, $V/n \le 1$ y

$$\left(\frac{V}{n}\right)^V \sum_{i=0}^{V} \binom{n}{i} \le \sum_{i=0}^{V} \left(\frac{V}{n}\right)^i \binom{n}{i} \le \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{V}{n}\right)^i \binom{n}{i} \le \left(1 + \frac{V}{n}\right)^n \le e^V.$$

P.5 Usamos el Lema de Sauer para $n = V_1 + V_2 + 2$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}(n) \le \sum_{i=0}^{V_1} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{V_2} \binom{n}{i} &= 2 \times 2^n - \sum_{i=V_1+1}^{n} \binom{n}{i} - \sum_{i=V_2+1}^{n} \binom{n}{i} \\
&= 2^{n+1} - \sum_{i=V_1+1}^{n} \binom{n}{i} - \sum_{i=V_2+1}^{n} \binom{n}{n-i} \\
&= 2^{n+1} - 2^n - \binom{n}{V_1+1} = 2^n - \binom{n}{V_1+1} < 2^n.
\end{aligned}$$

P.6.a Digamos que $C \subset \{0,1\}^n$ es r-separado si $\forall x, y \in C \rho(x,y) > r$. Sea $\Lambda = \{k \in \mathbb{N}^* : k = |C|$ t.q. C es r-separado y $C \subset B\}$. El conjunto Λ tiene un elemento máximo k^* porque $|\Lambda| \le 2^n$ y Λ es un subconjunto de $\mathbb{N}^*$. Sea C_r uno de los conjuntos r-separados de tamaño k^*. Por la razón que C_r es de tamaño máximo, C_r corresponde a los centros de una cubierta de $\{0,1\}^n$. Como, B_r es una cubierta mínima, sigue que $|B_r| \le |C_r|$.

P.6.b Dos elementos $c^{(i)}$, $c^{(j)}$ son a distancia al menos r. Eso da que el numero de coordenadas distintas $\sum_{m=1}^{n} \mathbb{1}_{c_m^{(i)} \ne c_m^{(j)}} \ge nr^2$. Entonces $\mathbb{P}(Y_k \in A_{i,j}) = |\text{coordenadas distintas}|/n \ge r^2$.

P.6.c

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\forall i, j \le M : i \ne j, \text{ al menos un } Y_k \text{ pertenece a } A_{i,j}) &= 1 - \mathbb{P}(\exists i, j \le M : i \ne j, \forall k,\ Y_k \notin A_{i,j}) \\
&\ge 1 - M^2 \mathbb{P}(\forall k,\ Y_k \notin A_{1,2}) \\
&= 1 - M^2 \prod_{k=1}^{K} \mathbb{P}(Y_k \notin A_{1,2}) \\
&\ge 1 - M^2(1-r^2)^K \ge 1 - M^2 e^{-Kr^2}.
\end{aligned}$$

P.6.d Tomar $K = \lceil 2\log M/r^2 \rceil + 1$ asegura que la probabilidad de la pregunta anterior sea positiva. Entonces existe una realización de los $y_1 = Y_1(\omega), \ldots, y_K = Y_K(\omega)$ tal que el evento es verificado. Si las coordenadas $y_1, \ldots, y_K$ no son todas distintas, uno puede completar el conjunto de esas coordenadas en un conjunto con K coordenadas distintas tal que el evento todavía ocurre entonces, se puede construir las $y_1, \ldots, y_K$ todas distintas. Sean $c^{(i)}, c^{(j)} \in C_r$ (son distintos por definición). Por construcción, hay (al menos) una coordenada y_k tal que $c^{(i)}_{y_k} \neq c^{(j)}_{y_k}$, es decir $c^{(i)}|_y \neq c^{(j)}|_y$. Consecuentemente, todos los elementos de $(C_r)_{|y}$ son distintos y $|(C_r)_{|y}| = M$.

P.6.e Por definición, $C_r \subset B$, y B no rompe cada conjunto S de tamaño mas grande que V, C_r tampoco. Por el Lema de Sauer (solo sobre las coordenadas $y_1, \ldots, y_k$) y para $K \geq V$,

$$M = |C_r| \leq \left(\frac{eK}{V}\right)^V .$$

P.6.f <u>Si $\log M \geq V$</u>, se ve inmediatamente que $K \geq V$ y entonces,

$$\log M \leq V \log\left(\frac{eK}{V}\right) \leq V \log\left(\frac{4e\log M}{Vr^2}\right) = V\left(\log\frac{4e}{r^2} + \log\frac{\log M}{V}\right) \leq V\log\frac{4e}{r^2} + \frac{1}{e}\log M.$$

Finalmente se deduce que $\log M \leq \frac{V}{1-1/e}\log\frac{4e}{r^2}$. <u>Si $\log M < V$</u>, la ultima desigualdad es directa.

P.6.g Como $H(r, \mathcal{A}(x_1^n), \rho) = \log|B_r| \leq \log M$, tenemos el resultado.